

GIP 154

***COMMENT AIDER LES PROFESSEURS A AIDER LES ELEVES
EN MATHEMATIQUES***

DOCUMENT 2

ANNEE 2001-2002

TABLE DES MATIERES

1. INTRODUCTION	1
2. EVALUATION DIAGNOSTIC.....	2
2.1. Différents aspects de la numération entière.....	2
2.2. Choix d'items dans les évaluations nationales.....	3
3. SITUATION EXPERIMENTEES.....	10
3.1. Jeu du trésor.....	10
3.2. Jeu des étiquettes.....	21
4. CONCLUSION.....	27
BIBLIOGRAPHIE.....	29
ANNEXES.....	30

1. INTRODUCTION

Pour l'année 2001-2002, le Groupe Innovation Production 154 était composé de : Bettina Madec et Sylviane Guillot, toutes deux maîtres E et travaillant au RASED (Réseau d'Aides Spécialisées aux Elèves en Difficulté) ; Dominique Moutounet (Segpa), Brigitte Moulinet (collège), Daniel Nigaut (MGI), Gérard Pascual (EREA), Gabriel Le Poche et Ghislaine Gueudet-Chartier, formateurs à l'IUFM de Bretagne. Ceci représente un changement important par rapport à la première année de fonctionnement du groupe, changement qui a justifié la rédaction de deux documents différents. Le présent rapport (document 2) concerne les travaux effectués en 2001-2002.

Afin d'aborder de manière concrète le problème des aides que l'on peut proposer aux enseignants, nous avons souhaité articuler nos travaux autour d'un thème mathématique précis.

Le thème de la numération entière a émergé naturellement des attentes de plusieurs enseignants du groupe ; des difficultés à conférer du sens à l'écriture (aux différentes écritures, comme nous le verrons ci-dessous) d'un nombre entier sont repérables du CP au collège, et constituent un obstacle dans toutes les tâches liées au calcul sur ces entiers, mais aussi aux activités de mesurage, ou d'estimation d'une mesure, et ont des conséquences importantes dans la vie courante.

Notre travail devrait, d'une part, permettre d'apporter des aides aux professeurs dont les élèves rencontrent des difficultés en numération entière. D'autre part, la démarche adoptée pour le thème de la numération peut être transférée à d'autres domaines mathématiques. Celle-ci peut être décrite de la manière suivante :

- Elaboration d'un outil de diagnostic à partir des évaluations nationales (CE2 ou sixième) permettant de repérer les difficultés de certains élèves ;
- Mise en place de situations de remédiation pour les élèves concernés (cette démarche repose bien entendu sur une conception constructiviste de l'apprentissage des mathématiques).

Dans ce document, nous présentons tout d'abord (partie 2) le diagnostic que nous avons réalisé à différents niveaux scolaires, puis (partie 3) les situations qui ont été expérimentées en classe. Nous concluons enfin (partie 4) en montrant plus précisément comment notre travail peut être diffusé et généralisé.

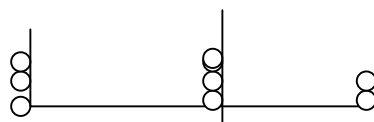
2. EVALUATION DIAGNOSTIC

Dans cette partie, nous allons tout d'abord exposer les différents aspects du thème de la numération entière qu'une évaluation doit prendre en compte. Nous présenterons ensuite les items, issus des évaluations nationales, que nous avons retenus au niveau CE2 et sixième ; nous nous pencherons enfin sur les réponses des élèves aux tests correspondants.

2.1 Différents aspects de la numération entière

Comment diagnostiquer les difficultés des élèves en numération entière ? Ce thème, qui peut sembler simple, recèle en fait de nombreux aspects que le diagnostic doit pouvoir cerner. Il est par ailleurs facile d'être abusé sur les capacités réelles des élèves, notamment à cause de l'emploi d'un matériel de numération inadapté. Ainsi avec un matériel qui reprend l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre :

Centaines Dizaines Unités



Un élève peut écrire que le nombre représenté est 3 4 2, sans faire le lien entre cette écriture mécanique et un nombre susceptible de représenter une quantité (de plus la hauteur des tiges, dans ce genre de matériel, est souvent limitée, de manière à ne pouvoir y placer que 9 billes !)

Nous avons largement utilisé, pour éviter ce genre de piège, les travaux de Bednarz et Janvier (Grand N n°33 et 34, 1984), d'autant plus que le matériel de numération est appelé à jouer un rôle important dans nos expérimentations (voir partie 3).

Les différents aspects de la numération qui doivent être pris en compte sont recensés dans le tableau suivant :

Numération : aspect outil	Numération : aspect objet	
	Algorithmique	Sémantique
<ul style="list-style-type: none"> - Techniques opératoires - Calcul mental - Ordres de grandeur - Classement de nombres 	<ul style="list-style-type: none"> - Trouver le successeur, le prédécesseur - Compter ou décompter de 10 en 10 	<ul style="list-style-type: none"> - Passer des chiffres aux mots-nombres et inversement - Ecrire en chiffres un nombre donné en unités, dizaines, centaines - Reconnaître un nombre donné par différentes écritures

Ce tableau traduit en particulier une distinction fondamentale entre la numération outil, notamment dans certains calculs (addition, soustraction, multiplication) et la numération objet d'étude¹.

Il faut de plus distinguer systématiquement ce que l'on nomme numération orale (mots-nombres) et numération écrite (chiffres)².

¹ A propos de la dialectique outil-objet, voir R. Douady, "Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement", Repères IREM vol 6, 1992.

Dans les pratiques des élèves, ces différents aspects interagissent.

2.2 Choix d'items dans les évaluations nationales

L'examen des rapports d'évaluation de CE2 et de sixième des dernières années montre que les commentaires et analyses des réponses sont de plus en plus étoffés ; en particulier les causes possibles d'erreurs sont parfois très détaillées.

La généralisation d'analyses approfondies des items paraît intéressante ; dans le même temps, elle conduirait à élaborer un document encore plus volumineux, que les enseignants hésiteraient à consulter.

D'après l'expérience des membres du groupe, si les résultats individuels aux évaluations sont utilisés (en particulier pour signaler au réseau les élèves en difficulté), le rapport final est très peu lu. Ceci est peut-être lié à un problème de diffusion du document, mais sans doute aussi à la quantité d'informations qu'il contient³.

L'idée d'extraire des évaluations nationales un nombre limité d'items, permettant cependant un diagnostic rapide et relativement complet sur un thème paraît donc pertinente. Il ne s'agit évidemment pas de nous contenter des items explicitement consacrés à la numération entière ; en effet ceux-ci ne permettent pas d'examiner les aspects outils mentionnés ci-dessus. Nous retiendrons donc certains items liés aux techniques opératoires ; nous avons de plus été conduits à élaborer nous-mêmes des items, afin de couvrir certains aspects de la numération entière qui n'apparaissent pas dans les évaluations nationales.

2.2.1 Evaluations de CE2

Voici une liste d'items retenus au niveau CE2⁴. Il convient d'effectuer parmi ceux-ci une sélection supplémentaire (il nous semble en effet préférable de ne pas dépasser huit items pour le diagnostic), en respectant les différents aspects présents dans le tableau ci-dessus.

Exercice 1

Calcul mental :

$32 + 9$, 10×9 , $51 - 30$, $43 - 5$

Exercice 2

Calcule en posant l'addition : $36 + 423$

Exercice 3

Calcule en posant la soustraction : $52 - 38$

² On peut consulter pour plus de détails : " Les spirales ", D.Barataud, JDI n°3 Novembre 1992 ; " Concours de professeur des écoles , mathématiques " R. Charnay, M. Mante, Hatier 1996.

³ Une note d'information présentant un bilan succinct des évaluations peut être consultée en ligne à l'adresse : www.education.gouv.fr/dpd/ni.htm.

⁴ Nous avons élaboré nous-mêmes les exercices 7 à 9. Pour cela, nous nous sommes notamment inspirés de " Situation d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée ", Butlen et Pezard, Grand N n°50 1991-1992.

Exercice 4

Lis ce nombre et écris-le en lettres : 615

Ecris en chiffres ce nombre : quatre-vingt-treize

Exercice 5

Range les nombres du plus petit au plus grand :

741	147	417	714	174	471
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Exercice 6

Dans l'atelier " danse ", il y a 6 groupes de 4 élèves et 1 groupe de 3 élèves.

Combien y a-t-il d'élèves ?

Exercice 7

Compter de 10 en 10 à partir de 56 jusqu'à 306

Décompter de 10 en 10 à partir de 334 jusqu'à 184

Exercice 8

Entourer les écritures qui désignent le nombre 250 :

10×25 $20 + 50$ $(10 \times 5) + (10 \times 20)$
 $50 + 200$ $(100 \times 20) + 25 + 25$ 205

Exercice 9

Parmi les nombres proposés, entoure la réponse qui te semble la meilleure :

La somme $438 + 254$ est proche de :

100 400 600 650 700 1000

2.2.2 *Evaluations de sixième*

Pour le niveau sixième, nous avons retenu les items suivants (qui sont ici formulés à l'intention des enseignants ; les consignes passées par oral figurent en italique, les autres consignes sont écrites sur le document-élève) :

Exercice 1

Consigne : Cet exercice est un exercice de calcul mental. Je vous lirai le calcul 2 fois, puis je vous laisserai 15 secondes pour répondre.

" Ecrivez le résultat de : Trente-trois plus vingt-sept ".

Exercice 2

3. Consigne : “ Ecrivez en chiffres le nombre qui suit quatre-vingt dix-huit. ”

4. Ecris en lettres le nombre qui précède 1100.

Exercice 3

Calcule en posant l'addition : $1\ 285 + 625$

Exercice 4

Calcule, en posant la soustraction, $937 - 46$

Exercice 5

Parmi les nombres proposés, entoure la réponse qui te semble la meilleure :

La somme **3 641 + 23 250** est proche de

5 500 6 000 15 000 30 000 50 000

Exercice 6

Ecris en chiffres le nombre constitué de 12 dizaines, 43 unités et 1 centaine.

Exercice 7

On a placé deux nombres dans un tableau.

		550			650		
--	--	-----	--	--	-----	--	--

Place dans les cases les cinq nombres suivants, du plus petit au plus grand :

684 92 560 68 608

Exercice 8

Entoure les écritures qui désignent le nombre 4 872 :

$40 + 80 + 72$ $(48 \times 100) + 2 + (10 \times 7)$ $4860 + 12$

$800 + 2 + 4070$ $4800 + 7 + 2$ $2 + (307 \times 10) + (100 \times 18)$

2.3 Analyse des résultats

2.3.1 Niveau CE2

Certains items ont été testés auprès d'élèves de CE2 qui avaient déjà fait l'objet d'un signalement au RASED. Ceci nous a conduits à ne pas tester certains aspects comme les ordres de grandeurs, jugés trop difficiles par les enseignantes. Les tableaux ci-dessous présentent les items testés et les résultats obtenus.

Elèves de Bettina Madec (2 élèves)

	<i>Question posée</i>	<i>Nombre d'échecs</i>
<i>Calcul mental (Num. outil)</i>	$42 + 9$	0
	9×10	0
	$51 - 30$	2
	10×7	1
<i>Opérations à poser (Num. outil)</i>	$130 + 67$	1
	$57 + 542$	1
	$68 + 547$	1
	$365 + 296$	0

	63-35	2
Num. objet, aspect algorithmique	Prédécesseur de sept cents, écrit en chiffres	1
	Successeur de 389, écrit en lettres	1
Num. objet, aspect syntaxique	Ecris en chiffres le nombre constitué de 12 dizaines, 43 unités et une centaine.	2

Elèves de Sylviane Guillot (4 élèves)

	Question posée	Nombre d'échecs
Calcul mental (Num. outil)	32 + 9	0
	9x10	2
	51-30	3
	43-5	2
Opérations à poser (Num. outil)	52 - 38	4
	36 + 423	1

L'observation des productions des élèves a donné lieu à des nombreuses remarques ; nous avons retenu en particulier les points suivants :

- Usuellement, l'aspect : " numération outil " entraîne plus de difficultés que l'aspect " numération objet ". Toutefois, ici les exercices concernant l'aspect " objet " étaient difficiles, probablement trop, donc cette tendance n'apparaît pas dans les résultats. En particulier les termes de " dizaines ", " centaines " posent problème ; d'ailleurs ils sont maintenant remplacés dans les programmes par " paquets de 10, de 100 ".
- Les exercices portant sur la soustraction sont prématurés à ce niveau, la soustraction étant en cours d'acquisition.
- A propos des additions posées, on remarque une difficulté spécifique si les nombres à additionner ne comportent pas autant de chiffres. Les élèves ont retenu une disposition en tableau, la première et la dernière colonne du tableau devant être remplies. Ils n'hésitent donc pas à " écarter " des chiffres, en laissant des trous qui seront traités comme des zéros dans l'addition. On observe ainsi :

$$\begin{array}{r}
 6 \quad 8 \\
 + \quad 5 \quad 4 \quad 7 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 5 \quad 5
 \end{array}$$

On peut proposer à un tel élève l'exercice suivant :

" Paul, qui écrit mal, a posé l'opération

$$\begin{array}{r}
 6 \quad 8 \\
 + \quad 5 \quad 4 \quad 7 \\
 \hline
 \end{array}$$

Effectue cette opération. "

D'une manière générale, on constate le danger de l'enseignement d'algorithmes avec des élèves en difficulté. Il faut autant que possible se diriger avec eux vers des procédures de calcul, en abandonnant les techniques

opérateurs. Dans le cas particulier du RASED, ceci pose un problème de coordination entre les maître(sse)s des classes concernées, et les intervenant(es) qui s'occupent des élèves en difficulté.

2.3.2 Niveau sixième

Les tests ont été proposés dans de nombreuses classes, qui dépassent largement les classes des membres du groupe, et bien entendu la classe de sixième. Ceci nous confirme qu'une telle sélection d'items peut intéresser de nombreux collègues.

Nous allons utiliser les abréviations suivantes dans le tableau récapitulatif des résultats :

CAP (6 élèves)

Sixième EREA : 6E (5 élèves)

Cinquième EREA : 5E (9 élèves)

Quatrième EREA : 4E (18 élèves)

Troisième EREA : 3E (9 élèves)

Sixième " normale " : 6 (24 élèves)

Cinquième " normale " : 5 (23 élèves)

Sixième SEGPA : 6S (13 élèves)

Quatrième SEGPA : 4S (16 élèves)

Troisième SEGPA : 3S (12 élèves)

Sixième " remise à niveau " : 6R (17 élèves)

Nous donnons dans le tableau ci-dessous le nombre d'échecs par classe (il s'agit des items décrits au paragraphe précédent, à l'exception de l'item 8, qui était sans doute trop difficile) :

Item	6 ^E (5)	5 ^E (9)	4 ^E (18)	3 ^E (9)	CAP (6)	6 (24)	5 (23)	6S (13)	4S (16)	3S (12)	6R (17)
33 + 27 Calcul mental	1	6	1	3	0	0	0	5	3	3	3
Successeur de 98	1	4	0	4	0	1	0	1	4	1	7
Prédécesseur de 1100	3	9	2	6	0	7	8	4	11	7	11
Poser 1285 + 625	0	0	1	4	0	0	0	1	1	0	3
Poser 937 - 46	2	4	4	16	1	2	3	8	4	3	5
Ordre de grandeur de 3641 + 23250	2	2	1	2	0	4	7	8	4	3	1
Ecrire le nombre : 12d, 43u, 1c	5	9	8	15	6	15	19	13	15	12	15
Placer des nombres dans un tableau	0	2	0	1	0	0	0	1	1	0	2

L'observation des réponses des élèves conduit en particulier aux remarques suivantes :

- Les items pour lesquels les classes normales échouent sont à supprimer (par exemple : le prédécesseur de 1100), du moins si l'objectif est un repérage d'élèves en difficulté.
- L'ordre de grandeur pose problème : c'est normal, car cet aspect est très peu, voire pas du tout travaillé à l'école.
- Exemple d'erreur sur la soustraction :

$$\begin{array}{r}
 937 \\
 - 46 \\
 \hline
 331 \\
 + 513 \\
 \hline
 844
 \end{array}$$

Il s'agit d'un mélange entre les techniques opératoires de la soustraction et de la multiplication. L'élève retire d'abord 6 à tous les chiffres de 937, mais en ôtant toujours le plus petit chiffre du plus grand ; puis il fait de même avec 4, et il ajoute les deux nombres trouvés. Ceci confirme l'observation faite pour les CE2, sur le danger des techniques opératoires pour les élèves faibles, qui tentent de reproduire un modèle sans aucun contrôle du sens.

Après l'emploi d'un tel outil de diagnostic, il convient de développer une remédiation adaptée. Nous avons choisi de traiter l'aspect sémantique (numération objet), dans différentes classes, en utilisant des situations que nous allons présenter ci-dessous.

3. SITUATIONS EXPERIMENTEES

Deux situations ont été testées en classe : la situation appelée "jeu du trésor", qui a été testée auprès d'élèves de CE2, de sixième SEGPA, et de cinquième à l'EREA ; et la situation appelée "jeu des étiquettes", qui a été testée en sixième au collège.

3.1 Jeu du trésor

3.1.1 Présentation du jeu

OBJECTIFS

- Remédier à des difficultés portant sur l' aspect sémantique de la numération écrite usuelle ;
- développer une image mentale concrète des quantités un, dix, cent et mille ;
- lever l'obstacle constitué par la différence entre valeur et quantité dans l'utilisation d'un matériel de numération ;
- donner à l'élève l'occasion d'attribuer un sens à chaque chiffre constitutif de l'écriture d'un nombre.

LA SITUATION

C'est une situation de jeu de hasard entre trois joueurs.

L'enjeu est de gagner en obtenant le plus de points après plusieurs tours de jeu (nombre de tours convenu à l'avance) constituant une partie .

Les points sont obtenus en jetant trois dés de couleurs différentes : ceux-ci rapportent respectivement unités, dizaines et centaines de points.

Les élèves récupèrent dans une banque, à chaque tour de jeu, le matériel qui symbolise leurs scores aux dés.

A la fin d'une partie ils comptabilisent le total de leurs points en s'appuyant ou sur le matériel obtenu ou (et) sur un calcul effectué à partir des données chiffrées (scores aux dés).

MATÉRIELS DE NUMÉRATION⁵ UTILISÉS POUR COMPTABILISER LES SCORES

Matériels de type – les “ uns ” qui se regroupent en restant visibles – type 1.

Les regroupements font apparaître :

premier groupement le paquet de 10 (la dizaine)

deuxième groupement le paquet de 100 ou 10 paquets de 10 (la centaine)

etc....

Matériels de type - les “ uns ” qui s'échangent mais restent visibles – type 1 bis.

L'échange fait disparaître le “ un ” initial dans un tout - la barre -, les dix barres dans une plaque, les dix plaques dans un gros cube.

Matériels de type - les “ uns ” qui disparaissent mais laissent une trace symbolique – type 2.

Le choix est celui de billets identiques sur lesquels sont inscrits les symboles 1, 10, 100 et 1000.

Matériels de type - les “ uns ” qui disparaissent et se transforment en un autre “ un ” en changeant de couleur – type 3.

Le choix est celui de jetons de différentes formes et tailles, mais, ayant en commun, une couleur identique qui en fixe la valeur.

LES ÉLÉMENTS VARIABLES

Le choix du dé multifaces : c'est le paramètre fondamental de la situation.

Les trois dés à six faces, avec les chiffres 1, 2 et 3 répétés deux fois, permettent la constitution d'un trésor individuel dont le nombre d'éléments de chaque espèce (unités, dizaines et centaines) sera à la fin de la partie compris entre 3 et 9 (ajout des 3 scores de chaque dé obtenus après trois tours de jeu).

Cette configuration facilite l'exactitude du comptage : la transcription - valeur du matériel écriture du nombre de points - est directe. Il suffit de repérer l'ordre centaines, dizaines, unités car toutes les espèces sont représentées.

Il servira à l'appropriation du jeu par les élèves.

Le choix des trois dés à 20 faces numérotées de 1 à 20 augmente la probabilité d'avoir, en fin de partie, un nombre d'éléments, d'une espèce déterminée, supérieur à 10. Cette situation obligera l'élève à organiser les éléments de son trésor par paquets de dix - acte fondamental dans la compréhension de la numération - s'il veut dénombrer efficacement.

⁵ utilisation de la dénomination de B. Guéritte-Hess

Notre hypothèse est que l'utilisation des dés à vingt faces, amené par le maître une fois que le jeu à été bien compris provoquera, chez les élèves, les apprentissages recherchés.

Le choix du type de matériel

Il n'est pas laissé à l'initiative de l'élève.

Il peut être judicieux d'attribuer le matériel de type 1 ou 1 bis à l'élève qui a le plus de difficultés, afin qu'il obtienne plus facilement un résultat exact dans le comptage de son propre trésor.

Le choix de la couleur des dés

Nous voulons éviter les couleurs traditionnelles de l'école : rouge pour les dizaines et vert pour les centaines.

Sans ces repères traditionnels, le choix de la couleur peut être laissé à l'initiative de l'élève responsable de la partie : on peut légitimement penser que ce choix variera d'une partie à l'autre en fonction des couleurs préférées par l'enfant et de la chance qu'il leur attribue.

3.1.2 Situation en CE2

La situation "jeu du trésor" a été testée auprès d'élèves de CE2 signalés au RASED suite aux évaluations de CE2. Ces élèves n'ont pas acquis les compétences de base au cycle 2 dans le domaine des travaux numériques et en résolution de problèmes simples.

Les élèves travaillent en regroupement d'adaptation, 2 fois par semaine dans le cadre d'une remédiation en mathématique dans le domaine de la numération.

Suite aux évaluations diagnostiques évoquées dans la partie 2, nous avons mis en œuvre une remédiation sur l'aspect sémantique du nombre à l'aide du jeu du trésor.

Choix des variables didactiques

Tous les élèves du groupe de remédiation de CE2 travaillent avec le même type de matériel, matériel qu'ils ont préalablement construit.

- Evolution dans le type de matériel

Passage d'un matériel concret (allumettes) à un matériel symbolique (tickets avec nombre inscrit).

- Quantité de matériel mis à disposition des élèves lors du jeu :

Matériel en quantité illimitée dans chaque type de groupements centaines, dizaines, unités.

Matériel en quantité limitée à 9 u, 9 d, 9 c , pour un élève (ou une équipe).

- Dés multifaces

Utilisation de 3 dés à 6 faces numérotées de 1 à 3 pour la phase d'appropriation.

Utilisation de 3 dés à 20 faces numérotées de 1 à 20 pour la phase de remédiation.

- Les voyages à la banque

Venir à la banque prendre son matériel en une seule fois ou en plusieurs fois (limiter le nombre de voyages).

1000 paquets de 10
10 000 unités

Mise en place du jeu du trésor

Phase d'appropriation avec le matériel de type 1 et 3 dés à 6 faces numérotées de 1 à 3 : 3 tours de jeu.
Chaque élève (ou chaque groupe) a du matériel à disposition. (voir : variables didactiques)

Phase de remédiation avec utilisation des dés multiface numérotées de 1 à 20
Utilisation du matériel de type 1 ou type 2 ou type 3.

Observations

La séquence de construction de matériel a nécessité plusieurs séances.
L'organisation de la collection en groupement n'est pas spontanée.

Les procédures observées :

- Comptage 1 à 1 (2 à 2) malgré l'importance de la collection à dénombrer : *Les groupements ne font pas sens pour ces élèves.*
- On a quelques groupements par 10, les élèves dénombrent les paquets mais n'arrivent pas associer le nombre correspondant : *Les élèves n'arrivent pas à passer d'un nombre de dizaines à la quantité d'allumettes correspondante.*
- Comptage de la collection séparée en parties quelconques.
Les élèves n'arrivent pas à mettre en place une procédure de calcul pour donner la quantité globale. Les procédures de calcul ne sont pas des outils transférables à des situations concrètes.

Phase d'appropriation : pas de difficulté observée.

Phase de remédiation :

Avec le matériel de type 1 :

Spontanément les élèves prennent la quantité donnée par le dé sans faire les échanges a priori.

Quand il doivent calculer la quantité du trésor :

- Les échanges ne se font pas , les élèves utilisent une écriture inadaptée : par exemple, 15 paquets de 10 et 12 unités -----1512
- Ils s'aident d'une représentation. Ce qu'ils figurent est en fait le matériel " Brissiaud " (PIC-BILLES) qu'ils pratiquent au CP . Ils sont donc très loin du matériel effectif de l'activité.

Ils calculent le trésor en faisant une addition bien qu'ils aient accès au contenu de la boîte qui constitue le trésor, ils n'utilisent plus le matériel. Il faut les encourager à vérifier, à auto-évaluer leurs scores.

Le passage d'un matériel du type 2 au type 3 n'est pas évident. Il nécessite un va et vient constant entre les représentations. Certains élèves ne peuvent pas accéder à l'abstraction du matériel symbolique.

3.1.3 Situation en sixième SEGPA

Suite aux évaluations élaborées par le GIP, ce jeu a également été utilisé dans une classe de sixième SEGPA avec treize élèves de niveau hétérogène. L'échec massif dans cette classe (100%) à l'item 6 du test diagnostic mettait en relief la nécessité de proposer des situations de remédiation sur l'aspect sémantique de la numération.

Matériel :

Dans le cadre du fonctionnement du collège, cette séquence a eu lieu en classe entière. Contrairement à la conception initiale du jeu, les élèves ont été installés à deux tables de jeu indépendantes. A chaque table, trois groupes de deux ou trois élèves ont joué les uns contre les autres avec le matériel suivant:

Dés :

Un jeu de trois dés, rouge, bleu et vert, de 20 faces par table.

Matériel du trésor:

- allumettes, unités, paquets de dix, paquets de dix dizaines et regroupements de dix centaines. Ce matériel a été fabriqué par les élèves afin de consolider l'image mentale des quantités un, dix, cent et mille.
- cubes-unités, barre de dix, plaques de cent, gros cube représentant 1000 unités.
- des tickets identiques portant les nombres 1, 10, 100, 1000.
- des jetons dont la valeur est arbitrairement fixée par la couleur (4 couleurs).

-> Autre matériel : (voir annexes 1, 2, 3)

- une feuille de route par élève sur laquelle sont reportés tous les tirages de dés d'une partie
- une feuille " Trésors " par équipe où sont notées les valeurs de tous les trésors après comptage par tous les groupes
- une feuille " scores " par équipe où sont notés les calculs effectués à partir des feuilles de route

Mise en oeuvre :

Le jeu est présenté aux élèves et la valeur des dés est clairement établie : " le dé vert rapporte des centaines... "

Après une phase d'appropriation avec des dés à six faces portant seulement les nombres 1, 2, et 3 ; chaque table a joué en parallèle et indépendamment avec les dés à vingt faces .

A tour de rôle, chaque groupe jette les dés, tous les joueurs de la table notent les tirages. Le groupe prend le matériel correspondant dans la banque. Après trois tours de jeu, chaque groupe compte son trésor puis, par permutations, celui des deux autres groupes de la table ; les résultats sont notés sur la “ feuille trésors ”(une par groupe) qui est relevée.

Ensuite, les élèves calculent leur score final et ceux des autres groupes à partir des feuilles de route. Ils les inscrivent sur la “ feuille scores ” (une par groupe).

Toute différence de résultats dans les comptages ou les calculs donne lieu à discussion des procédures mises en œuvre. Le matériel ayant été collecté sous la surveillance d'un “ expert ”, le comptage en commun du trésor sert de validation finale. C'est aussi l'occasion de verbaliser les échanges. Le classement final est alors établi.

Choix des variables et observations.

Choix des dés :

Chaque dé représentant un groupement :unité, dizaine et centaine, les dés ont été choisis à vingt faces afin d'obtenir rapidement dans chaque groupement des nombres supérieurs à dix. Ceci devrait aider les élèves à percevoir la nécessité de passer au groupement supérieur et de connaître ainsi les équivalences ; cette situation obligera les élèves à organiser leur trésor par paquets de dix s'ils veulent dénombrer efficacement.

Choix des couleurs sur la feuille de route :

L'ordre des couleurs inscrit sur la feuille de route ne respecte pas l'ordre centaines, dizaines, unités évitant ainsi de renforcer les erreurs habituelles du type : “ 5 centaines 13dizaines 17 unités se lit 51317 ”

Choix du matériel :

Les allumettes et les cubes sont des matériels de même type où l'unité et les groupements restent visibles (renforcement des images mentales), tandis que les quantités sont seulement symbolisées dans le cas des tickets et uniquement abstraites pour les jetons.

Chacun des trois groupes d'une table, se voit attribuer un des types de matériel ; lors du comptage final des trésors, chaque groupe sera ainsi amené à utiliser les trois types de matériel .

En effet, l'hypothèse retenue est que “ la confrontation de l'élève à ces trois types de matériel au cours d'une même partie lui permettra :

- . de réussir au moins une fois son activité de comptage avec le matériel de type allumettes, cubes
- . d 'effectuer, petit à petit, les liens nécessaires entre différents aspects de la numération ”.

(G. Le Poche, 1997)

De plus, la limitation en matériel impose d'effectuer des échanges pour construire les trésors.

Observations :

-> On aurait pu penser que ce jeu conçu et mis en œuvre à l'école primaire aurait pu sembler puéril à des élèves de sixième. Or nous avons constaté que ces derniers ont apprécié cette activité .

-> L'option de ne pas faire correspondre les couleurs des jetons avec celles de dés n'est pas judicieuse et rajoute une difficulté supplémentaire.

-> Aucun élève n'a rencontré de difficultés de dénombrement dans le comptage de son trésor quel que soit le type de matériel. Par contre, les échanges de dix objets contre un dix fois plus grand ont été mis en œuvre très progressivement :

- En premier, dans les groupes utilisant les allumettes ou les cubes et d'abord pour échanger dix centaines contre un gros " Mille ". Est-ce l'effet visuel de la taille de ces objets ou l'impossibilité de l'obtenir directement par tirage ? Puis, dans l'ordre, dix dizaines pour une centaine et dix unités pour une dizaine .
- .En second les échanges sont apparus dans les groupes utilisant les tickets et ce dans le même ordre que précédemment .
- Par contre, les groupes utilisant les jetons n'ont jamais montré l'intention d'effectuer des échanges.

-> Dans la phase de calculs, la plupart des élèves additionnent les nombres de chaque colonne de la feuille de route sans tenir compte de la valeur attribuée aux dés, le nombre final n'étant que la juxtaposition des résultats des trois colonnes. Même ceux qui avaient été capables de corriger cette erreur de procédure dans la phase d'appropriation, n'ont pas transféré cet acquis dans la phase de jeu (voir annexe 4).

-> Parmi les procédures attendues, l'écriture de c centaines ou d dizaines sous la forme c00 ou d0 n'est apparue que dans le comptage du trésor mais jamais dans les calculs.

Conclusion

L'analyse des erreurs à l'item 6 permettait de penser que la connaissance des équivalences "dix dizaines - une centaine" par exemple devait être consolidée et que le rôle fondamental des groupements par dix n'était pas maîtrisé par l'ensemble de la classe. Un dispositif de remédiation tel que ce jeu avec du matériel concret semblait donc approprié.

Après trois parties de jeu, la classe a continué à travailler sous la forme d'exercices papier-crayon du type de l'item 6. Les élèves avaient le choix de la méthode de résolution. Après discussion, trois procédures ont émergé dans la classe : le dessin du matériel type " cubes ", l'utilisation du tableau de numération, l'addition sous forme $c00+d0+u$. Dans l'ensemble, les élèves montrent qu'ils sont capables de trouver l'écriture canonique des nombres proposés, y compris des grands nombres.

Après plusieurs semaines d'interruption, l'item 6 a été reproposé en évaluation et réussi par dix élèves sur quatorze, avec les trois procédures citées ci-dessus (voir annexes 5, 6, 7, 8).

Ce jeu a été bien perçu par les élèves ; il semble efficace comme situation de remédiation.

3.1.4 Situation en cinquième à l'EREA

La particularité de l'EREA est d'accueillir des jeunes relevant de l'enseignement spécialisé type SEGPA de Collège, en classe (programme adaptés du Collège) et en internat.

Le jeu du trésor a été testé à l'EREA dans une classe de Cinquième, comportant 10 élèves (garçons).

Il s'agit de jeunes d'une même tranche d'âge mais avec des niveaux de compétences très différents en mathématiques.

L'opportunité de mettre en œuvre le jeu du trésor est apparue lors des évaluations initiales mises en place par le groupe sur la numération et par l'observation quotidienne des élèves sur l'usage des nombres entiers.

Organisation de la classe :

Pour l'expérimentation, la classe est organisée en deux groupes A et B comportant pour le groupe A, 3 équipes de 2 joueurs et pour le groupe B, 2 équipes de deux joueurs, chaque groupe est encadré par un enseignant qui anime le jeu et observe l'activité des élèves.

Trois types de matériel sont utilisés : étiquettes, cubes, bâchettes (choix délibéré pour la première séance compte tenu des capacités des élèves).

Phase 1 : Appropriation par deux tours de jeux avec 3 dés à trois faces .

Phase 2 : Jeu à trois tours avec trois dés à 20 faces.

Observations :

Phase 1 : Pas de difficulté majeure observée, mais beaucoup de questions et entrée rapide dans la tâche pour certains. On note une seule remarque du type : " C'est un jeu de petits ", malgré l'âge des élèves. Ceux-ci se sont réellement investis dans la situation.

Phase 2 : Beaucoup de conflits à gérer (règle du jeu, sur le matériel, le lancer de dés...). Ce qui montre encore que les élèves sont bien entrés dans l'activité .

Une équipe cherche à tricher pour obtenir le meilleur score avec les dés.

Une autre, trouvant les calculs fastidieux pense à utiliser une calculette (interdite ensuite pour rétablir l'équité entre les équipes).

Pas d'a priori des élèves sur un type de matériel, même si le matériel cubes les attire.

Une certaine lenteur est constatée (vérification, recomptage, ne pas faire d'erreur).

Le comptage par groupement n'est pas spontané, les élèves préfèrent le comptage à l'unité, même si celui-ci est long et fastidieux.

Le décompte par le calcul a été compris d'emblée par un seul élève. Tous les autres, qui pensaient leur solution correcte, additionnaient en fait les scores sans tenir compte de la valeur attribuée aux dés. La mise en commun a

permis de mettre en évidence l'erreur faite dans leur procédure, et de faire accepter par tous la procédure proposée par le seul élève qui avait directement employé un calcul tenant compte de la valeur des dés (bien que cet élève fasse l'objet d'un rejet généralisé de la part de ses camarades).

3.2 Jeu des étiquettes

3.2.1 Présentation du jeu

OBJECTIF

Consolider l'aspect sémantique de la numération écrite usuelle :

- en attribuant un sens à chaque chiffre ou groupement de chiffres constitutif de l'écriture d'un nombre ;
- en bloquant la décomposition additive usuelle.

LA SITUATION

C'est une situation de **recherche de décompositions additives d'un nombre**.

Cette recherche s'effectue en temps limité par des équipes de trois joueurs en compétition.

L'enjeu est de gagner en obtenant le plus de points après plusieurs tours de jeu (nombre de tours convenu à l'avance) constituant une partie.

Des points sont attribués à chaque décomposition exacte.

MATERIEL

Des étiquettes :

Un jeu de trois séries de cartes (rouge, bleu et jaune) sur lesquelles figurent d'un côté une valeur de 1 à 26 et de l'autre côté la lettre de l'alphabet correspondante.

La série rouge représente les unités, la série bleu les dizaines et la série jaune les centaines.

DÉROULEMENT

Au début de chaque tour de jeu, le professeur attribue à chaque équipe un lot restreint d'étiquettes choisies dans le stock initial et qui seront les seules permises.

Pour qu'une décomposition soit licite, il faut qu'elle soit réalisée à partir des étiquettes du lot restreint.

L'ÉLÉMENT VARIABLE

Le choix des étiquettes permises.

3.2.2 Situation en sixième de l'enseignement général

Les résultats de l'évaluation nationale mettent en évidence les difficultés rencontrées par les élèves en numération. Les taux de réussite de la classe sont les plus bas en numération : seulement 64% dans le champ

“ numération et écriture d’un nombre ” et 71 % dans le champ des “ Décimaux ”. De même, le taux de réussite très faible à l’item 6 proposé par le GIP confirme ces non-acquis.

Certes un échec d’item en numération décimale en début de sixième n’est pas particulièrement grave puisque les apprentissages sont poursuivis en cours d’année, mais il s’avère nécessaire de consolider déjà les acquis de la numération des nombres entiers.

Aussi une séquence de consolidation a-t-elle été envisagée par le biais du jeu des étiquettes.

Objectifs :

-> Redonner du sens à la numération décimale, en particulier en termes de groupements de puissances de dix

-> Développer des démarches de résolution dans une situation nouvelle.

Matériel :

Dans le cadre du fonctionnement du collège, la séquence a eu lieu en classe entière (24 élèves) Les élèves ont été répartis en équipes de trois préalablement définies par l’enseignant .

-> Etiquettes :

Un jeu complet des 3 x 26 étiquettes pour chaque équipe.

-> Autre matériel (voir annexes 9, 10)

- une feuille de route par équipe sur laquelle chaque équipe note les tirages ainsi que les solutions qui en découlent, trouvées par le groupe.

(remarque : la feuille de route correspondant à la phase d’appropriation du jeu a été distribuée à tous les élèves)

- des feuilles de brouillon

- un tableau de scores des équipes affiché dans la classe

-> tableau de valeurs à l’usage de l’enseignant (voir annexe 11)

Ce tableau comporte les nombres choisis par l’enseignant, les cartes qu’il autorise et les décompositions possibles.

Mise en œuvre :

Préambule :

Les équipes sont de niveau hétérogène.

De plus, pour constituer les équipes l’enseignant a tenu compte en priorité de la personnalité de ses élèves de manière à ce que chacun puisse s’exprimer au sein du groupe

Le jeu est présenté aux élèves et la valeur de chaque série de cartes est définie :

“ Les cartes bleu donnent le nombre de dizaines possibles, les cartes rouges, le nombre de centaines possible, Vous n’avez le droit de jouer seulement qu’avec les cartes dont on vous indique les lettres dans chaque couleur.”

Pour accroître la motivation et la rapidité d exécution, les parties se font en temps limité (3 minutes)

Le meneur de jeu demande par ailleurs à chaque équipe de désigner le rapporteur de son groupe.

Phase d’appropriation (voir annexe 12)

Trois élèves sont désignés et sous la tutelle du maître de jeu jouent deux parties de démonstration afin que les règles du jeu soient explicites pour la classe entière.

Exemple 1 :

Nombre proposé	Tirages :	Décompositions attendues
102	Etiquette bleue : A, I, J Etiquette Rouge: A, B Etiquette jaune: A,	1 c + 2 u 10 d + 2 u 9 d + 1 d + 2 u

Exemple 2:

Nombre proposé	Tirages :	Décomposition attendue
91	Etiquette bleue : A, I, Etiquette Rouge: A, B	Solution unique 9 d + 1 u décomposition canonique

Les trois élèves affichent au tableau leurs solutions de décomposition. puis les comparent ;

le meneur du jeu précise les enjeux :

3 points pour une réponse juste unique

1 point pour une proposition correcte mais donnée par au moins deux équipes

(– 2) points pour une réponse erronée .

Parties de jeu

Le jeu se déroule selon les modalités définies ci-dessus. avec les nombres proposés et les cartes autorisées par l’enseignant.

A la fin de chaque partie, lorsque les rapporteurs ont écrit leurs décompositions au tableau, celles-ci sont validées et discutées si nécessaire par l’ensemble de la classe.

Les scores sont inscrits sur la feuille affichée.

Observations

-> Ce jeu n'a été expérimenté dans le cadre du GIP que dans cette classe du collège. Il a été très apprécié des élèves et ces derniers s'y sont bien investis. Comme prévu le temps limité et l'affichage des scores pimentent le jeu et renforcent leur motivation.

-> Les nombres à décomposer ont été choisis en fonction de leur taille et de la présence de zéro intermédiaire .

-> La difficulté des parties dépend du nombre et du choix des cartes autorisées qui conditionne les décompositions possibles. La manipulation et la prise en compte de plus de six cartes dans un groupement deviennent difficiles à gérer par les élèves .

-> La décomposition canonique étant évidente a été supprimée.

Par contre, le choix des cartes a privilégié des décompositions faisant appel à des sommes dans le même groupement et à des échanges avec le groupement d'ordre supérieur.

Exemple :

$$\begin{aligned} 112 &= 9 \text{ d} + 22 \text{ u} \\ &= 3 \text{ d} + 5 \text{ d} + 25 \text{ u} + 7 \text{ u} \end{aligned}$$

De même, le choix des cartes non utilisées n'est pas anodin. Il faut que ces cartes intruses conduisent vers des pistes de décomposition qui seront abandonnées, d'où la nécessité de développer d'autres stratégies.

Exemple

Nombre proposé 51 : cartes permises : 2 d, 3d, 4 d, 5 d, 5 u, 6 u, 10 u, 11 u et 15 u

Abandon de 5 d et 2 d + 3 d d'où la nécessité d'opérer avec les équivalences

->Les élèves ont eu quelques difficultés pour s'approprier le jeu car, justement, ils ne " voyaient " pas d'autres décompositions possibles que la canonique.

-> Lors de la validation des propositions, le meneur de jeu a été amené à rappeler les équivalences de type 10 dizaines = 1 centaine pour amorcer l'idée d'échanges, les retenues pouvant participer à la construction des nombres.

Conclusion

Lorsque les élèves ont eu une bonne maîtrise du jeu, quelques parties sans matériel ont été proposées. Ils n'ont rencontré aucune difficulté à retrouver les décompositions attendues. Ils semblent donc avoir progressé dans la

capacité à opérer avec les valeurs des groupements de la numération décimale et à travailler simultanément avec plusieurs groupements.

Il nous semblerait pertinent d'utiliser ce jeu à la suite du jeu du trésor afin de le proposer à des élèves rencontrant des difficultés en numération dans un dispositif de remédiation. De plus, ce jeu peut, sans doute, être transposé pour jouer avec les nombres décimaux.

4. CONCLUSION

Nous avons décrit ci-dessus un travail portant sur le thème de la numération entière. Nous souhaitons montrer dans cette conclusion que le travail du groupe va en fait au-delà de ce thème, et proposer des pistes pour la prolongation et la diffusion de la démarche effectuée.

Une démarche qui peut être transférée

Nous avons fait le choix (choix influencé par notre pratique de la didactique des mathématiques) de nous centrer sur un thème précis. Toutefois la démarche que nous avons adoptée peut être transférée à d'autres thèmes de l'enseignement primaire comme de l'enseignement secondaire. Il s'agit, tout d'abord, de prendre conscience des principaux aspects et compétences liés à une notion mathématique. Ceci requiert un premier travail bibliographique. L'étape suivante est la réalisation d'un diagnostic utilisant les évaluations nationales du niveau scolaire souhaité (qui n'est pas nécessairement le niveau de la classe concernée, nous avons ainsi employé en troisième des évaluations de sixième). Les items choisis pour le diagnostic doivent être en nombre restreint, mais doivent cependant couvrir les différents aspects du thème. La réalisation du test diagnostic en classe, pour un thème donné, dure entre 15 et 30mn. Plusieurs thèmes peuvent être traités dans une même classe ; il faudra dans ce cas éviter de les aborder simultanément. Cette étape de diagnostic permet de repérer les élèves en difficulté par rapport au thème. Pour ceux-ci, on met alors en place un dispositif de remédiation. Celui-ci est basé sur l'emploi de situations liées aux thèmes ; ces situations peuvent être issues de la recherche bibliographique préliminaire, ou être élaborées par les enseignants eux-mêmes (soulignons cependant que dans ce cas, un long travail d'élaboration et de test de la situation est nécessaire).

Nous avons ici fait de plus le choix de situations utilisant un matériel pédagogique adapté à la notion en jeu, et autant que possible varié ; ceci n'est pas nécessairement transférable à tous les thèmes et tous les niveaux scolaires. Toutefois, lorsqu'il est possible, l'emploi de matériel peut aider les élèves en grande difficulté à redonner du sens aux notions mathématiques ; mais il est essentiel d'utiliser différents types de matériel, pour permettre aux élèves de progresser dans l'abstraction.

Diffusion et prolongements

Notre groupe entier (huit personnes) a travaillé un an pour élaborer, à propos de la numération entière, la démarche décrite ci-dessus. Il ne s'agit pas de demander à un enseignant d'effectuer seul une démarche comparable, qui plus est sur plusieurs thèmes. En réalité, l'étape réellement longue dans la démarche est la recherche d'une bibliographie adaptée afin de :

- choisir de manière pertinente des items dans les évaluations, pour n'oublier aucun aspect important de la notion en jeu,
- disposer de situations de remédiation (dans l'hypothèse, optimiste, où des chercheurs ont effectivement élaboré de telles situations pour le thème concerné).

Il faudrait donc qu'une telle recherche soit effectuée pour d'autres thèmes que celui que nous avons traité. Mais il faut surtout que les résultats de ces recherches soient disponibles, et connus des enseignants concernés.

Les membres du groupe sont maintenant à même d'aider des collègues qui s'interrogeraient sur le thème de la numération. C'est une première voie de diffusion possible, mais elle pose un gros problème de communication : qui connaîtra le travail du groupe et ses membres ? Notre travail a déjà fait l'objet d'un article, qui paraîtra dans le bulletin de l'IREM de Rennes en septembre 2002. Il a été présenté au colloque de l'IREM de Rennes en mai 2002, et fera également l'objet d'un exposé au congrès de l'Association des Professeurs de Mathématiques en octobre 2002. Cependant le public touché par cette voie reste limité.

Une autre possibilité est évidemment la diffusion du présent document dans les établissements.

Nous envisageons une autre voie, mettant à profit les moyens de communication actuels : l'élaboration d'un site web. Celui-ci comporterait pour un thème donné la liste des différents aspects à prendre en compte, avec un choix d'items associés (à mettre à jour chaque année après les évaluations), la description de quelques situations de remédiation (ou simplement des références bibliographiques d'ouvrages décrivant ces situations), et une liste de personnes pouvant être contactées pour d'autres conseils.

L'intitulé de notre groupe était : "Comment aider les professeurs à aider les élèves en mathématiques ?" ; les éléments exposés dans cette conclusion constituent la réponse que nous apportons à cette question. La mise en œuvre des dernières pistes évoquées nécessite bien entendu un travail, et donc des moyens, supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

Barataud D. (1992) *Les spirales*, JDI n°3.

Bednarz N. et Janvier B. (1984) *La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage*, Grand N n°33, 1984.

Bednarz N. et Janvier B. (1984) *La numération : une stratégie didactique pour une meilleure compréhension*, Grand N n°34, 1984.

Butlen D. et Pedzard M. (1992) *Situation d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée*, Grand N n°50.

Charnay R., Mante M. (1996) *Concours de professeur des écoles, mathématiques*, Hatier.

DeBlois L. (1996) *Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 16.1.

Douady, R. (1992) *Les apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, Repère IREM vol6.

Le Poche G. (1997) *Une remédiation en numération auprès d'élèves en difficulté*, document Copirelem.